Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 11.2017
J. Heiland / S. Werner
vom Max Planck Institut Magdeburg

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 17/18)
Übungsblatt 1

1. Man bestimme jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k, \quad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k$$
.

2. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird definiert über die Potenzreihe
$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k .$$
Man zeige
   a) Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $\rho = \infty$.
   b) Für beliebige $u, v \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(u+v) = \exp(u)\,\exp(v)$.

3. Die trigonometrischen Funktionen $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ werden im Komplexen definiert über die Potenzreihen
$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} .$$
Man zeige für beliebige $z \in \mathbb{C}$ die Beziehung
   a) $\exp(iz) = \cos(z) + i\,\sin(z)$
   b) $\sin(z) = \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big)$
   c) $\cos(z) = \frac{1}{2}\big(\exp(iz) + \exp(-iz)\big)$.
   d) $|\cos^2(z) + \sin^2(z)| = 1$

4. Für beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ beweise man die Additionstheoreme
   a) $\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$
   b) $\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$.

5. Man bestimme jeweils alle $z \in \mathbb{C}$ mit
   a) $\exp(z) = -2$, b) $\exp(z) = i$, c) $\sin(z) = 100$, d) $\cos(z) = 3i$.

HINWEIS: In den Beweisen darf verwendet werden, was auf dem Blatt weiter oben steht.