

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 17/18)
Übungsblatt 3

1. Untersuchen Sie, in welchen Punkten $z_0 \in \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen $f(z)$ stetig und in welchen sie komplex differenzierbar sind:

$$f(z) = \bar{z}, \quad f(z) = z \operatorname{Re}(z), \quad f(z) = |z|^2.$$

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene, zusammenhängende Menge und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt. Man beweise, dass dann $f(z)$ konstant sein muss.
3. Zeigen Sie, dass Potenzreihen beliebig oft differenzierbar sind, also dass die formal definierte Ableitung
- eine konvergente Potenzreihe mit dem gleichen Konvergenzradius ist
 - und tatsächlich die Ableitung darstellt.

Hinweis: Es dürfen die Argumente aus Jänich (Kapitel 1.2) verwendet werden (mit entsprechender Aufbereitung).

4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung definiert durch

$$f(x + iy) := u(x, y) + i v(x, y) \quad \forall (x, y) \in G_{\mathbb{R}^2},$$

wobei

$$G_{\mathbb{R}^2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in G\}$$

die zu G gehörige offene Menge in \mathbb{R}^2 und $u, v : G_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene Funktionen sind. Man beweise: Ist die zu f gehörige Funktion $\vec{f} : G_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\vec{f}(x, y) := (u(x, y), v(x, y))^T$ total differenzierbar in $(x_0, y_0) \in G_{\mathbb{R}^2}$ und gelten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

so ist die Funktion $f(z)$ im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex differenzierbar.

5. Von einer komplexen Funktion

$$f : x + iy \mapsto 1 + x + y + x^2 - y^2 + iv(x, y)$$

ist nur der Realteil und der Funktionswert $f(0) = 1$ bekannt. Man bestimme den Imaginärteil $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, der f zu einer holomorphen Funktion macht.

6. Man beweise, dass es kein v gibt, so dass $f : x + iy \mapsto ye^x + iv(x, y)$ eine holomorphe Funktion ist.