

**Funktionentheorie für das Lehramt (WS 17/18)**  
**Übungsblatt 4**

1. Sei

$$\gamma_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \cos(t\pi) + i \sin(t\pi)$$

und sei

$$\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto 1 - 2t.$$

Man berechne die Integrale der Funktionen

$$f: z \mapsto \exp(iz) \quad \text{und} \quad f: z \mapsto |\operatorname{Re}z|$$

längs von  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ .

2. Die Kurve  $\gamma$  sei die Gerade vom Punkt  $z_1 = 1$  zum Punkt  $z_2 = i$ . Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz.$$

3. Gegeben seien zu einer Menge  $G \subset \mathbb{C}$  eine stetige Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  sowie zwei Parametrisierungen

$$\gamma: [a, b] \rightarrow G \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow G$$

derselben Kurve derart, dass eine streng monoton wachsende und stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi: [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$  existiert mit

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\varphi(t)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Man beweise die Parametrisierungsinvarianz des Kurvenintegrals über  $f$  längs der gegebenen Kurve, d.h.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

4. Sei  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion über einem Gebiet  $G$ . Zu einer gegebenen glatten Kurve  $\gamma$  in  $G$  sei  $\gamma^-$  die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve  $\gamma$ . Man beweise die Beziehung

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$