Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
J. Heiland / S. Werner
vom Max Planck Institut Magdeburg

12.2017

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 17/18)
Übungsblatt 5

1. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion über einem Gebiet G. Zu einer gegebenen glatten Kurve γ in G sei γ^- die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve γ. Man beweise die Beziehung
$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz\,.$$

2. Auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ gegeben und $\gamma : [a, b] \to G$ sei eine glatte Kurve in G. Die Funktionen $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\phi_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, seien definiert als
$$\phi(t) := F(\gamma(t)) = \phi_1(t) + i\phi_2(t) \qquad \forall t \in [a, b]$$
mit $\phi_1(t) := \mathrm{Re}(\phi(t))$ und $\phi_2(t) := \mathrm{Im}(\phi(t))$. Man beweise die folgende Kettenregel:
$$\dot\phi(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) \qquad \forall t \in (a, b)\,,$$
wobei $\dot\phi(t) := \dot\phi_1(t) + i\dot\phi_2(t)$.

3. Man weise direkt nach, dass die bekannten Stammfunktionen zu
   - $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$
   - $z \mapsto e^z$
   - $z \mapsto \cos(z)$

   wirklich die Stammfunktionen sind.

4. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Man beweise, dass die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals equivalänt dazu ist, dass das Integral von f über eine geschlossene Kurve verschwindet. Also, dass
$$\oint_\gamma f(z)dz = 0, \quad \text{für alle geschlossenen Kurven } \gamma \subset G$$
impliziert, dass
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz, \quad \text{für alle } \gamma_1, \gamma_2 \subset G \text{ mit dem gleichen Anfangs- und Endpunkt}$$
und umgekehrt.