Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 01.2018
J. Heiland / S. Werner
vom Max Planck Institut Magdeburg

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 17/18)
Übungsblatt 6

1. Zu gegebenem $z_0 \in \mathbb{C}$ und reellem $r > 0$ bezeichne $\partial K_r(z_0)$ den Rand der Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius r. Man berechne den Wert des Integrals

$$\oint_\gamma \frac{\exp(z)}{z^2+1}\,dz\,,$$

wobei die Kurve γ gegeben ist durch

a) $\gamma = \partial K_1(i)$

b) $\gamma = \partial K_1(-i)$

c) $\gamma = \partial K_3(0)$ (*Hinweis:* Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{z^2+1}$)

und jeweils im mathematisch positiven Umlaufsinn definiert sei.

2. Man beweise die folgende Aussage. Sei

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k\,, \qquad a_k \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,$$

ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann gibt es eine Zahl $z_1 \in \mathbb{C}$, so dass

$$P(z) = (z - z_1)P_1(z) \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}\,,$$

wobei $P_1(z)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

3. Man entwickle die folgenden Funktionen in Umgebung des Punktes $a \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe der Form

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-a)^k$$

a) $f(z) = \dfrac{1}{z-1}\,,\quad a = 0$ (*Hinweis:* Bezug zur geometrische Reihe herstellen)

b) $f(z) = \dfrac{1}{z-2}\,,\quad a = 0$ (*Hinweis:* geometrische Reihe $\dfrac{\alpha}{1-q}$ erzeugen)

c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}\,,\quad a = 0$ (*Hinweis:* Partialbruchzerlegung).

Für jede Potenzreihe bestimme man jeweils den Konvergenzradius.

4. Für die folgenden Funktionen klassifiziere man jeweils die isolierte Singularität $a = 0$ durch Betrachtung der Laurent-Reihe oder des Grenzwertes $\lim_{z \to a} f(z)$. Bei Polstellen gebe man auch die Ordnung an.

   a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$

   b) $f(z) = \dfrac{1}{e^{1/z}}$

   c) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$

5. Die *Bessel-Funktion* der Ordnung m mit $m \in \mathbb{N}_0$ sei definiert durch die Reihe

$$J_m(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m} .$$

   a) Auf welcher Menge $G \subset \mathbb{C}$ ist die Reihe punktweise konvergent und auf welcher Menge $A \subset G$ ist die Funktion $J_m(z)$ analytisch ?

   b) Man zeige, dass die Funktion $f(z) = J_0(z)$ Lösung der Differentialgleichung

$$z^2 f''(z) + z f'(z) + z^2 f(z) = 0$$

   ist.