Schein: , → Dr. Vanselow

Prüfung

1x vorrechnen

1x programmieren

Literatur: AWA: Hairer, Nørsett, Wanner

Solving ordinary diff. equ. I, II

RWA: Plato: NM Kompakt

(& AWA) Hanke-Bourgeois: Grundlagen der NM

Roos, Schwetlick: NM

Differenzenverfahren: Großmann, Roos: Num. Beh. partieller DGL

1. Anfangswertaufgaben gewöhnlicher DGL

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \\ u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(x_0) = u_0 \end{array}} \qquad \text{AWA}$$

Bemerkung:
- Wir betrachten i.A. nur den skalaren Fall, aber die Mehrzahl der formulierten Ergebnisse gilt analog für DGL-Systeme.
- Wir setzen generell voraus, dass die AWA eine hinreichend glatte eindeutige Lösung besitzt. → Analysis

  (z.B. setzen wir generell voraus: f stetig, f Lipschitz-stetig bez. des 2. Argumentes)

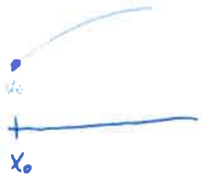
§1 Grundlegende Diskretisierungskonzepte:
- Einschrittverfahren ESV
- Mehrschrittverfahren MSV

Basic Discretization concepts

Single-step methods
- Euler scheme
- Runge-Kutta

Multi-step methods
- BDF

1.1. Einschrittverfahren

Gitter:  

der Einfachheit halber: äquidistant: $x_k = x_0 + k \cdot h$, $k = 1, 2, \dots$

h Schrittweite

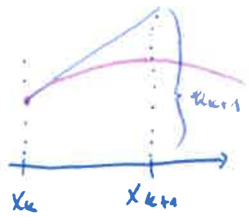
allgemeine Form eines ESV: u_k sei der Näherungswert von u an der Stelle x_k

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \varphi(x_k, u_k) \qquad , \ \varphi \text{ – } \underline{\text{Verfahrensfunktion}}$$

(explizites Einschrittverfahren)

implizites ESV: $\dfrac{u_{k+1} - u_k}{h} = \varphi(x_k, u_k, u_{k+1})$

einfachstes ESV:



$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = f(x_k, u_k)$$

Euler, explizit

Analyse des Euler-Verfahrens:

Ziel: Abschätzung des Fehlers $u(x_k) - u_k = e_k$

$u' = f(x,u) \xrightarrow{\int_{x_k}^{x_{k+1}}}$

$$\left.\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + h\, f(x_k, u_k) \\ u(x_{k+1}) &= u(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi, u(\xi))\, d\xi \end{aligned}\right\} -$$

$$\Rightarrow \quad e_{k+1} = e_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(\xi, u(\xi)) - f(x_k, u_k)]\, d\xi$$

oder $e_{k+1} = e_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(\xi, u(\xi)) - f(x_k, u(x_k)) + f(x_k, u(x_k)) - f(x_k, u_k)]\, d\xi$

jetzt L-Stetigkeit im 2. Arg

($|f(a,b) - f(a,c)| \le L|b-c|$)

also $|e_{k+1}| \le (1 + hL)|e_k| + \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(\xi, u(\xi)) - f(x_k, u(x_k))]\, d\xi \right|$

↓ Quadraturfehler ist proportional zu h^2

also: $|e_{k+1}| \le (1+hL)|e_k| + dh^2$

Abkürzung $|e_{k+1}| \le A|e_k| + B$, $e_0 = 0$

$|e_1| \le B$

$|e_2| \le B(1+A)$

$|e_3| \le B(1+A+A^2)$

$\vdots$

$|e_k| \le B(1+A+A^2+\dots A^k) = B\dfrac{A^k-1}{A-1}$

also $|e_k| \le dh^2\dfrac{(1+hL)^k-1}{hL}$

Umrechnung: $1+x \le e^x$: $(1+hL)^k \le (e^{hL})^k = e^{(x_k-x_0)L}$

Ergebnis: $|u(x_k) - u_k| \le \dfrac{d}{L}\underset{\searrow 0}{h}\underbrace{(e^{(x_k-x_0)L}-1)}_{\text{constant}}$

numerisches Beispiel:

DGL-Syst. $u_1' = e^x u_2$, $u_1(0) = \sin 1$

$u_2' = -e^x u_1$, $u_2(0) = \cos 1$

Lösung: $u_1 = \cancel{e^x \sin x}\ \sin(e^x)$

$u_2 = \cancel{e^x}\ \cos(e^x)$

Aufgabe: $u_1(3)$ numerisch berechnen , $u_1(3) = 0{,}94449\dots$

13.10.06

Ein Verfahren besitzt die Konvergenzordnung p, wenn gilt

$|u(x_k) - u_k| \le Ch^p$

Wie steht es mit dem Einfluss von Rundungsfehlern?

$V_{k+1} = V_k + hf(x_k, V_k) + \varepsilon_k$

Abschätzung des Rundungsfehlers? $\underset{\text{analog zu oben}}{\rightsquigarrow}$ $|u_k - v_k| \le \dfrac{C}{h}$

Folgerung: praktisch ist mit Euler keine große Genauigkeit erzielbar.

Bemerkung: Ähnlich erhält man für jedes ESV die Größenordnung $O(\frac{1}{h})$ für den Einfluss von Rundungsfehlern

Folgerung: Der Gesamtfehler kann nur hinreichend klein sein, wenn das Verfahren eine höhere Ordnung besitzt. (Praktisch: $p = 4, 5, \dots, 8$)

Grundlegende Begriffe zur Analyse von ESV: Konsistenz, Stabilität

ESV: $\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \phi(x_k, h, u_k)$, $u' = f(x,u)$, $u(x_0) = u_0$

diskretes Problem — ~~stetiges~~ Problem

Def: Die Größe

$$K := \left| \cancel{\frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{h} \Phi(x_k, h, u(x_k))} \right| \quad \left| \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{h} - \varphi(x_k, h, u(x_k)) \right|$$

heißt Konsistenzfehler. Das Verfahren heißt konsistent, wenn $K \to 0$ für $h \to 0$.
Das Verfahren heißt konsistent der Ordnung p, wenn $K \leq C h^p$ gilt.

Konsistenz: Einsetzen der exakten Lösung ins diskrete Problem.

Nachweis von Konsistenz: Taylor Entwicklung

Bsp: Euler: $K := \left| \frac{u(x_k + h) - u(x_k)}{h} - f(x_k) \right| = \left| u'(x_k) + R - f(x_k, u_k) \right|$

Taylor an der Stelle x_k

$R \to 0$ für $h \to 0$: konsistent ✓

typisch: $R = O(h)$ $\Rightarrow$ Euler ist konsistent von der Ordnung 1

Zur Stabilität

$u' = f(x,u)$, $u(x_0) = u_0$: gestörtes Problem $v' = \tilde{f}(x,v)$, $v(x_0) = v_0$

Ziel: Abschätzung von $u - v$ bei gegebenem $|f - \tilde{f}| \leq \varepsilon$, $|u_0 - v_0| \leq \eta$

Ausgang $(u-v)(x) = u_0 - v_0 + \int_{x_0}^{x} [f(t,u) - \tilde{f}(t,v)]\, dt$

$$= u_0 - v_0 + \int_{x_0}^{x} [f(t,u) - f(t,v) + f(t,v) - \tilde{f}(t,v)]\, dt$$

$$\Rightarrow |(u-v)(x)| \leq \eta + \varepsilon |x - x_0| + L \int_{x_0}^{x} |u-v|\, dt$$

das Stipendium - la beca
der/die Studentin - el/la estudiante
die Universität - la universidad
~~viaj~~ viajar a Guatemala

Mathematik - matemáticas

No he estudiado el idioma español en la ~~e~~ escuela.
En invierno estuve en Guatemala por un mes.

Hilfsmittel. Gronwall-Lemma: φ stetig, $0 \le \varphi(x) \le C + L \int_a^x \varphi(t)\,dt$

Dann gilt $\varphi(x) \le c\, e^{L(x-a)}$

Beweis: vollständige Induktion

$$\varphi(x) \le C \sum_{k=0}^{n} \frac{(Lx)^k}{k!} + R_{n+1} \quad \text{mit}$$

$$R_{n+1} = L^{n+1} \int_0^x \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_n} \varphi(s_{n+1})\, ds_{n+1}\, ds_n \ldots ds_1$$

- $\cancel{n} \to \infty$ $\quad |R_{n+1}| \le \frac{L^{n+1}}{(n+1)!} \max|\varphi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Anwendung: $\quad |(u-v)(x)| \le (\eta + \varepsilon|b-x_0|)\, e^{L|x-x_0|}$ Stabilitätsabschätzung

$x \in [x_0, b]$ Das stetige Problem ist stabil.

Stabilität des diskreten Problems

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \varphi(x_k, h, u_k) \quad \text{und} \quad \frac{v_{k+1} - v_k}{h} = \varphi(x_k, h, v_k) + \eta$$

Def: Das diskrete Problem heißt stabil, wenn es eine Konstante C gibt, sodass $|u_k - v_k| \le C\eta$

Stability – abstract formulation

abstrakte Formulierung:

- stetiges Problem: $F(u)=0$

Stabilität: Es existiert eine Konstante c derart, dass

$$|v-w| \leq c\,|F(v)-F(w)|$$

- diskretes Problem: $F_h(u_h)=0$

Stabilität: Es existiert eine Konstante c_s derart, daß

$$|v_h-w_h| \leq c_s\,|F_h(v_h)-F_h(w_h)|$$

Konsistenz der Ordnung p:

$$|F_h(u)| \leq C_k h^p$$

(sorgfältig interpretieren) Funktion (stetig) $\leftrightarrow$ Vektor

Satz: $\boxed{\text{Aus Konsistenz der Ordnung } p \text{ und Stabilität des diskreten Problems folgt Konvergenz der Ordnung } p.}$

Beweis: Stabilität des diskr. Problems: $|u-u_h| \leq C_s|F_h(u)-\underbrace{F_h(u_h)}_{0}|$

$$|u-u_h| \leq C_s C_k h^p$$

zurück zum ESV: Stabilität: analog zur Fehlerabschätzung bei Euler

Ergebnis: Ist Φ L-stetig bezgl. u_k, so sind ESV stabil

$\boxed{\text{ESV sind stabil; daher Suche nach Verfahren mit höher Konvergenzordnung}}$

There are several ways to construct single step methods of higher order!

1. Möglichkeit: Extrapolation anwenden:

Näherungen auf verschiedenen Gittern werden geschickt kombiniert

Ausgangsverfahren Euler:

$$\left.\begin{aligned} u_{k,h} &= u_k(x_k) + ch + O(h^2) \\ h \to h/2 \quad u_{k,h/2} &= u_k(x_k) + c\tfrac{h}{2} + O(h^2) \end{aligned}\right\} \cdot 2 \; -$$

$\rightarrow$ $\boxed{2u_{k,\frac{h}{2}} - u_{k,h} = u_k(x_k) + O(h^2)}$

Vermutung: dieses Verfahren besitzt K-Ordnung 2

x_k x_{k+1}

Schrittweite h: $u_{k+1} = u_k + hf(x_k, u_k)$

$$h/2 \begin{cases} u_{k+\frac{1}{2}} = u_k + \frac{h}{2} f(x_k, u_k) \\ u_{k+1,h/2} = u_{k+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(x_k+\frac{h}{2}, u_{k+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

neuer Näherungswert:

$$u^*_{k+1} = u_k + hf(x_k+\tfrac{h}{2}, u_k) + \cancel{\tfrac{h}{2} hf(x_k + \tfrac{h}{2}, u_k) + \tfrac{h}{2} f(x_k,}$$
$$+ hf(x_k+\tfrac{h}{2}, u_k + \tfrac{h}{2} f(x_k, u_k)) - u_k - hf(x_k, u_k)$$

$$\boxed{u^*_{k+1} = u_k + hf(x_k+\tfrac{h}{2}, u_k + \tfrac{h}{2} f(x_k, u_k))}$$

$\Vert$ Verbessertes Eulerverfahren mit Ordnung 2

2. Möglichkeit: $u(x_{k+1}) = u(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi, u(\xi))\, d\xi$

Approximation: $u_{k+1} = u_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, u(x_k + \frac{h}{2}))$ (1)

noch einmal: $u(x_k + \frac{h}{2}) := u_k + \frac{h}{2} f(x_k, u_k)$

Verallgemeinerung: Nutzung beliebiger Quadraturformeln

$(\int_a^b g(t)\, dt \approx \sum_i c_i\, g(t_i)$

17.10.06

Anwendung einer 5-Punkt-Quadraturformel auf (1)

$$u_{k+1} = u_k + h \sum_{i=1}^{5} c_i f(x_k + a_i h, \underbrace{u(x_k + a_i h)}_{})$$

$\rightarrow$ weitere Approximation

c_i - gesuchte, a $0 \leq a_i \leq 1$

Nun gilt: $u(x_k + a_i h) = u(x_k) + \int_{x_k}^{x_k + a_i h} f(\xi, u(\xi))\, d\xi$

$\overset{QF}{\Rightarrow}$ $u(x_k + a_i h) \approx u_k + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} f(u_k + a_j h, u(x_k + a_j h))$

We use a quadrature rule of order ~~[illegible]~~ s

$$x_{k+1} = x_k + h \sum_{j=1}^{s} \beta_j f(t_k + \gamma_j h, \underbrace{x(t_k + \gamma_j h}_{\text{need to approximate this by } X_{kj} \text{ (internal stages)}})$$

we call this

$\dot{X}_{kj}$ ~ "derivatives"

idea: approximate the internal stages via the 'derivative's

$$X_{kj} = x_k + h \sum_{\ell=1}^{s} \alpha_{j\ell} \dot{X}_{k,\ell}$$

$$\dot{X}_{k,\ell} = f(t_k + \gamma_j h, X_{k,j})$$

This gives a (possibly nonlinear) equation system for

$X_{k,j}$, $j = 1, \ldots, s$.

It is defined through x_k, t_k, h and f ← Problem paramet

and the coefficients $\alpha_{j\ell}$, β_j, γ_j, $j, \ell = 1, \ldots, s$ ← method

We put the coeffs in the so-called Butcher tableau

$$\begin{array}{c|c} \gamma & \mathcal{A} \\ \hline & \beta^T \end{array}$$

$\mathcal{A} = [\alpha_{j\ell}]$

$\beta = [\beta_j]$

$\gamma = [\gamma_j]$

The right choice of α, β, γ (and s – the stage number) ensures stability and a certain order of consistency.

Examples

$$\begin{array}{c|c} \boxed{0} & \boxed{0} \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$x_{k+1} = x_k + h\cdot 1\cdot \dot X_{k1} \qquad = x_k + h\cdot f(t_k, x_k)$$

$$\dot X_{k1} = f(t_k + \boxed{0}\cdot h,\ X_{k1}) \qquad = f(t_k, x_k)$$

$$X_{k1} = x_k + h\boxed{0}\cdot \dot X_{k1} \qquad = x_k$$

explicit Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$x_{k+1} = x_k + h\cdot 1\cdot \dot X_{k1} \qquad = x_k + f(t_k, x_{k+1})$$

$$\dot X_{k1} = f(t_k + h,\ X_{k1}) \qquad = f(t_{k+1}, x_{k+1})$$

$$X_{k1} = x_k + h\cdot 1\cdot \dot X_{k1} \qquad = x_{k+1}$$

implicit Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$x_{k+1} = x_k + h(0\cdot \dot X_{k1} + 1\cdot \dot X_{k2}) = x_k + h\, f(t_k + \tfrac{1}{2}h,\ x_k + \tfrac{1}{2}h f(t_k, x_k))$$

$$\dot X_{k1} = f(t_k + 0\cdot h,\ X_{k1}) \qquad = f(t_k, x_k)$$

$$\dot X_{k2} = f(t_k + \tfrac{1}{2}h,\ X_{k2}) \qquad = f(t_k + \tfrac{1}{2}h,\ x_k + h\cdot\tfrac{1}{2} f(t_k, x_k))$$

$$X_{k1} = x_k + h\cdot 0\cdot \dot X_{k1} \qquad = x_k$$

$$X_{k2} = x_k + h\cdot \tfrac{1}{2}\, \dot X_{k1} \qquad = x_k + h\cdot\tfrac{1}{2} f(t_k, x_k)$$

improved Euler

Some useful facts

bekanntestes Bsp, klassisches RKV:

$$\begin{array}{c|cccc} 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

England:

$$\begin{array}{c|cccc} 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & & \\ 1 & 0 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 0 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

1963 – es gibt keine Verf. mit $s = 5$ und Ordnung 5

Anzahl der Bedingungen:

Ordnung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bedingungen	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205

Stufenzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
erreichbare Ord.	1	2	3	4	4	5	6	6	7	?

1975 Curtis: Ordng. 10 mit $s = 18$, Hairer 1978: $s = 17$

Schrittweitensteuerung

Praktisch arbeitet man nicht mit äquidistanten Schrittweiten, sondern steuert das Gitter a posteriori.

Klassische Strategien:

1.) Ausnutzung von Extrapolationsideen

2.) Anwendung eingebetteter RKV

(modern: Anwendung von Fehlerschätzern (obere Schranke der Fehler), z.B. im Zusammenhang mit DG-Methoden, (discontinuous Galerkin))

zu 1.) $u_h(x) = u(x) + c h^p + o(h^p)$ (Vorraussetzung)

$h := h/2 \quad u_{h/2}(x) = u(x) + c\left(\frac{h}{2}\right)^p + o(h^p) \quad \cdot 2^p$

$$u_{extr.} = \frac{2^p u_{h/2} - u_h}{2^p - 1}$$

~ statt $|u - u_h|$ wäre der Fehler