- Seite 42 vor Satz 5.1
  Die Folge ist wohldefiniert, falls $\Lambda(H_0) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Sei $H_k = ZJZ^{-1}$ die Jordannormalform von $H_k$. Da $J$ eine obere Dreieckmatrix ist, ist $J^{-1}$ ebenfalls eine obere Dreicksmatrix mit

  $$(J^{-1})_{i,i} = \frac{1}{J_{i,i}} \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

  Nun ist

  $$\Lambda(H_{k+1}) = \Lambda(\tfrac{1}{2} Z(J + J^{-1})Z^{-1}) = \Lambda(\tfrac{1}{2}(J + J^{-1})) = \{\tfrac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda(H_k)\}.$$

  Außerdem gilt $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ und damit $\Lambda(H_k) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \Rightarrow \Lambda(H_{k+1}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

- Kapitel 6, Eindeutigkeitsresultat
  Um ein Eindeutigkeitsresultat zu erhalten zerlegen wir den Projektor $\Pi$ mittels Singulärwertzerlegung und erhalten

  $$\Pi = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma V_1^T.$$

  Wir setzen $\Theta_l := U_1$ und $\Theta_r^T := \Sigma V_1^T$. Die Spalten von $\Theta_l$ bilden eine (orthonormale) Basis von $\mathrm{span}(\{\Pi_{*,1}, \ldots, \Pi_{*,n_v}\})$ und die Spalten von $\Theta_r$ bilden eine (orthogonale) Basis von $\mathrm{span}(\{\Pi^T{}_{*,1}, \ldots, \Pi^T{}_{*,n_v}\})$. Wir benutzen die Zerlegung des Projektors und schreiben den Zustand $v$ als eindeutige Linearkombination der Basisvektoren $v(t) = \Theta_r \tilde{v}(t)$.

  $$\begin{aligned} M\dot{v}(t) &= \Pi A v(t) + Bu(t) \Leftrightarrow \\ M\Theta_r \dot{\tilde{v}}(t) &= \Theta_l \Theta_r^T A \Theta_r \tilde{v}(t) + \Theta_l \Theta_r^T Bu(t) \Leftrightarrow \\ M\Pi^T \Theta_r \dot{\tilde{v}}(t) &= \Theta_l \Theta_r^T A \Theta_r \tilde{v}(t) + \Theta_l \Theta_r^T Bu(t) \Leftrightarrow \\ \Pi M \Theta_r \dot{\tilde{v}}(t) &= \Theta_l \Theta_r^T A \Theta_r \tilde{v}(t) + \Theta_l \Theta_r^T Bu(t) \Leftrightarrow \\ \Theta_l \Theta_r^T M \Theta_r \dot{\tilde{v}}(t) &= \Theta_l \Theta_r^T A \Theta_r \tilde{v}(t) + \Theta_l \Theta_r^T Bu(t) \Leftrightarrow \\ \Theta_r^T M \Theta_r \dot{\tilde{v}}(t) &= \Theta_r^T A \Theta_r \tilde{v}(t) + \Theta_r^T Bu(t) \end{aligned}$$

  Daher ist

  $$\begin{aligned} M\dot{v}(t) &= \Pi A v(t) + \Pi B u(t) \\ v(0) &= v_0 \\ y(t) &= Cv(t) \end{aligned}$$

  äquivalent zu

  $$\begin{aligned} \Theta_r^T M \Theta_r \dot{\tilde{v}}(t) &= \Theta_r^T A \Theta_r \tilde{v}(t) + \Theta_r^T Bu(t) \\ \tilde{v}(0) &= \Theta_r \tilde{v}_0 \\ y(t) &= C\Theta_r \tilde{v}(t). \end{aligned}$$

  Wir erhalten damit folgende algebraische Riccatigleichung

  $$0 = \Theta_r^T C^T C \Theta_r + \Theta_r^T A^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T M \Theta_r + \Theta_r M^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T A s \Theta_r - \Theta_r^T M^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T B B^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T M \Theta_r.$$

Das explizite Berechnen und Zerlegen des Projektors möchte man möglichst vermeiden.

$$
\begin{aligned}
&0 = \Theta_r^T C^T C \Theta_r + \Theta_r^T A^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T M \Theta_r + \Theta_r M^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T A \Theta_r - \Theta_r^T M^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T B B^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T M \Theta_r \Leftrightarrow \\
&0 = \Pi C^T C \Pi^T + \Pi A^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T M \Pi^T + \Pi M^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T A \Pi^T - \Pi M^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r B B^T \Theta_r \tilde{X} \Theta_r^T M \Pi^T \Leftrightarrow \\
&0 = \Pi C^T C \Pi^T + \Pi A^T \Theta_r \tilde{Z} \tilde{Z}^T \Theta_r^T M \Pi^T + \Pi M^T \Theta_r \tilde{Z} \tilde{Z}^T \Theta_r^T A \Pi^T \\
&\quad - \Pi M^T \Theta_r \tilde{Z} \tilde{Z}^T \Theta_r B B^T \Theta_r \tilde{Z} \tilde{Z}^T \Theta_r^T M \Pi^T.
\end{aligned}
$$

Letztere Gleichung is äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
&0 = \Pi C^T C \Pi^T + \Pi A^T Z Z^T M \Pi^T + \Pi M^T Z Z^T A \Pi^T - \Pi M^T Z Z^T B B^T Z Z^T M \Pi^T \wedge \Pi^T Z = Z \Leftrightarrow \\
&0 = \Pi C^T C \Pi^T + \Pi A^T Z Z^T M \Pi^T + M^T Z Z^T A \Pi^T - M^T Z Z^T B B^T Z Z^T M \wedge \Pi^T Z = Z.
\end{aligned}
$$

Die Bedingung, dass die Spalten des Niedrigrangfaktors $Z$ im Bild von $\Pi^T$ liegen, sichert man algorithmisch ab, indem man während der ADI-Iteration mehrere Sattelpunktproblem der Form

$$
\left( \begin{bmatrix} A + p_j M & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{k-1}^T & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_j \\ \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix}
$$

löst.

- Kapitel 7, die Anfangsstörung $v_{\varepsilon_{pertub}}$
  In der gesamten Arbeit wurde die anfängliche Störung $v_{\varepsilon_{pertub}}$ nicht näher spezifiziert. Für das Beispiel der Wirbelstraße war die Wahl $v_{\varepsilon_{pertub}} = 0.25 \cdot v_s$. Für das Stufengebiet war die Wahl $v_{\varepsilon_{pertub}} = 0.1 \cdot v_s$.
  Eine interessantere Wahl wäre die stationären Navier-Stokes Gleichungen mit „Störterm" $f \neq 0$ zu betrachten.

$$
\begin{aligned}
-\nu \Delta v_{\varepsilon_{pertub}} + (v_{\varepsilon_{pertub}} \cdot \nabla) v_{\varepsilon_{pertub}} + \nabla p_{\varepsilon_{pertub}} &= f && \text{in } \Omega \\
\operatorname{div} v_{\varepsilon_{pertub}} &= 0 && \text{in } \Omega \\
v_{\varepsilon_{pertub}} &= g && \text{auf } \Gamma_{in}, \\
v_{\varepsilon_{pertub}} &= 0 && \text{auf } \Gamma_{ctrl}, \\
v_{\varepsilon_{pertub}} &= 0 && \text{auf } \Gamma_{h}, \\
\nu \frac{\partial v_{\varepsilon_{pertub}}}{\partial n} &= p_{\varepsilon_{pertub}} n && \text{auf } \Gamma_{out}.
\end{aligned}
$$

- Kapitel 7.4, Seite 58
  Es ist „sinnvoller" die Terme wie folgt zu bennen

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (v_\delta \cdot \nabla) v_s \cdot w \, \mathrm{d}x &\longrightarrow K v_\delta, \\
\int_\Omega (v_s \cdot \nabla) v_\delta \cdot w \, \mathrm{d}x &\longrightarrow R v_\delta.
\end{aligned}
$$

- Kapitel 7.4, Seite 58
  Da zweidimensionale Probleme betrachtet wurde, besitzen die Matrizen $M$ und $A$ nach

Sortierung der Basen nach der Richtung eine $2 \times 2$ Blockstruktur und $G$ hat eine $2 \times 1$ Blockstruktur. Die interne Blockstruktur wurde in den Lösern der `M.E.S.S.`nicht ausgenutzt.

- Kapitel 7.4, Seite 58
  Der Penalty-Ansatz $v_\delta = \mathcal{B}u + \varepsilon_{pen}(p_\delta n - \nu\frac{\partial v_\delta}{\partial n})$ führt zu schlecht konditionierten Matrizen. Eventuell kann man Nitsche's Methode benutzen (`https://github.com/MiroK/fenics-nitsche`).

- Kapitel 7.4, Seite 59, Quelltextausschnitt 7.4
  Mit Hilfe der Methode `compute_first_entity_collision`, die in `FEniCS` implementiert ist, lässt sich die Methode `_buildC` vereinfachen.

- Kapitel 7.5, Seite 60, Quelltextausschnitt 7.5
  Die Behandlung des nichtlinearen Terms auf dem Dirichletrand ist nicht korrekt im Quelltext.

```
def assembleN(self):
(w_test, p_test) = TestFunctions(self.W)
(u, p) = self.up.split()
self.N = assemble(inner(w_test, grad(u) * u)*dx)
[bcup.apply(self.N) for bcup in self.bcups] ###<-Fehler###
```

Quelltextausschnitt 1: Assemblieren von $N$

- Kapitel 7.6, Seite 69
  Die Eigenvektoren, die den instabilen Eigenraum aufspannen sind entweder reel oder kommen als Paar von zueinander komplex konjugierten Vektoren vor.
  Sei $x = \overline{y} \in \mathbb{C}^{n_v+n_p} \setminus \mathbb{R}^{n_v+n_p}$ ein paar zueinander komplex konjgugierter Eigenvektoren.
  Da $\operatorname{span}(\{x, y\}) = \operatorname{span}(\{\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(y)\})$ über dem Körper $\mathbb{C}$ gilt, kann man aus den Eigenvektoren eine reele Basis des instabilien Eigenraums konstruieren.
  Da bei den Benchmark nur wenig instabile Moden auftraten, ist es ebenso zulässig mittels dem QZ-Algorithmus die Bernoulligleichung zu lösen. Der QZ-Algorithmus war lieferte kleinere Residuen als die Signumsfunktionsiteration. Allerdings ist in der derzeitigen `SciPy` Version (`0.14.0`) nicht vorgesehen, dass man die Eigenwerte in der Methode `scipy.linalg.qz` sortieren kann.

- Kapitel 8.1.4, Abbildung 8.7-8.9
  Die imaginäre Achse ist in den Abbildungen unterschiedlich skaliert.

- Kapitel 8.2.4.1-8.2.4.2
  Die Norm des Differenzzustandes $v_\delta$ ist für $t = 0$ in der Simulation mit und ohne Steuerung verschieden. Das ist nicht korrekt, da $v_\delta(0) = v_{\varepsilon_{pertub}}$ in beiden Fällen gilt. Hier lag ein Fehler im Programmcode vor.