

Projekt Praktische Mathematik

**Numerische Grenzschichtberechnung mit
FDM**

Dirk Griesing, 205165
Jens Gottfried, 222152

9. November 2010

Betreut durch Jan Heiland und David Nolte

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Physikalisches Problem	2
3	Modellierung	3
3.1	Entdimensionalisierung	3
3.2	Transformation	5
3.3	PRANDTLsche Grenzschichtgleichungen	6
4	Numerische Methoden	7
4.1	Finite Differenzen Methode	7
4.2	Konsistenz und Stabilität	9
5	Algorithmus zur Grenzschichtberechnung	11
6	Ergebnisse	14
7	Fazit	18

Abbildungsverzeichnis

1	laminare Grenzschicht	6
2	Gitteranordnung zur Entwicklung von Differenzengleichungen	7
3	Fehlerentwicklung in logarithmischer Darstellung	10
4	Grenzschichtprofil Fall 1	15
5	Grenzschichtprofil Fall 2	15
6	Grenzschichtprofil Fall 3	16
7	Grenzschichtprofile	17

1 Einleitung

Aufgrund der immer stärker zunehmenden Rechnerleistung ist die numerische Mathematik ein nicht mehr weg zu denkendes Hilfsmittel zur Berechnung von mathematischen Lösungen. Sie ist u.a. nötig, um Näherungslösungen für Probleme zu berechnen, zu denen keine analytische Lösung bekannt ist.

In diesem Projekt wird die numerische Berechnung einer laminaren Plattengrenzschicht durchgeführt. Dies bedeutet konkret, dass die NAVIER-STOKESchen Gleichungen für eine laminare Grenzschicht einer eben angeströmten Platte numerisch zu lösen sind.

Hierzu müssen zunächst einige Annahmen getroffen werden, die das Gleichungssystem vereinfachen, um somit die Komplexität der NAVIER-STOKESchen-Gleichungen zu verringern. Als Ergebnis erhält man die PRANDTLschen-Grenzschichtgleichungen.

Um diese letztlich numerisch lösen zu können, müssen die darin enthaltenen Differentialausdrücke geeignet approximiert werden. Mit den approximierten Ausdrücken kann das Differentialgleichungssystem mit der Finiten Differenzen Methode (FDM) gelöst werden.

Zum Lösen des Gleichungssystems werden Verfahren wie der GAUSSalgorithmus oder die CHOLESKY-Zerlegung verwendet und man erhält somit das gesuchte Geschwindigkeitsfeld einer laminaren Grenzschicht.

Schwerpunkte dieser Arbeit sind die Implementierung des FDM Modells in der Programmiersprache C sowie die Auseinandersetzung mit möglichen Fehlerquellen.

2 Physikalisches Problem

In vielen technischen Anwendungen, insbesondere bei der Umströmung oder Durchströmung von Körpern, treten aufgrund der geringen Viskositäten Strömungen mit sehr hohen Reynoldszahlen auf. Das können Tragflügelumströmungen, Bauwerksumströmungen, aber auch Strömungen des Wassers um ein Schiff herum sein. Hier wird exemplarisch der Fall einer eben angeströmten Platte behandelt.

Eine Strömung kann prinzipiell in zwei Bereiche unterteilt werden. Zum Einen die Außenströmung, die sich hier wie eine Potentialströmung verhält und in welcher die Viskosität vernachlässigt werden kann, zum Anderen die Grenzschicht im wandnahen Bereich, in der die Viskosität mit berücksichtigt werden muss. Die sogenannte Wandgrenzschicht entsteht durch die Wandhaftbedingung, welche bei NEWTONschen Fluiden stets erfüllt sein muss und die durch Reibung zwischen der Wand und dem Fluid entsteht. Die Dicke der Grenzschicht ist bei hohen REYNOLDSzahlen sehr klein im Vergleich zu den übrigen charakteristischen Längen. Die Lösungen der Grenzschichtgleichungen haben somit für sehr große REYNOLDSzahlen einen asymptotischen Charakter. Zur Modellierung des Problems ist es daher eine gute Näherung, den Grenzprozess $Re \rightarrow \infty$ durchzuführen.

Bei Grenzschichten ist grundsätzlich zwischen einer laminaren und einer turbulenten Grenzschicht zu unterscheiden. Die Unterschiede zeigen sich in den verschiedenen Wand Schubspannungen und Grenzschichtdicken. In diesem Fall soll eine laminare Grenzschicht behandelt werden. Zu beachten ist hierbei, dass die REYNOLDSzahl nicht beliebig groß werden darf, da ab einer Größe von $Re = 5 \cdot 10^5$ ein Umschlag von einer laminaren in eine turbulente Grenzschicht stattfindet.

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik sind die NAVIER-STOKESSchen Gleichungen. Bei Ihnen handelt es sich um ein System von nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Sie setzen sich im Wesentlichen aus der Impulsbilanz sowie den Massen- und Energieerhaltungssätzen zusammen. Für inkompressible Fluide ist die Auswertung des Energieerhaltungssatzes nicht erforderlich. Bis heute ist weder eine globale Lösung der NAVIER-STOKESSchen Gleichung bekannt, noch bewiesen, dass eine solche überhaupt existiert. Somit ist die numerische Berechnung der Lösung ein wichtiges Hilfsmittel der Strömungsmechanik.

3 Modellierung

Um die NAVIER-STOKESSche-Gleichung numerisch lösen zu können, müssen vorab die vorhandenen Größen entdimensionalisiert werden. Danach ist eine geeignete Transformation anzuwenden, um unabhängig von der REYNOLDSzahl rechnen zu können. Ziel dieser Modellierungen sind die PRANDTLschen Grenzschichtgleichungen, welche gegenüber den NAVIER-STOKESSchen Gleichungen in ihrer Rechenökonomie deutlich überlegen sind.

3.1 Entdimensionalisierung

Um die NAVIER-STOKES-Gleichungen zu formulieren, beginnt man mit dem Impulssatz

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + (\rho \underline{u} \cdot \nabla) \rho \underline{u} = -\nabla p + \nu \Delta \underline{u} + \rho \underline{f} \quad (1)$$

und der Massenerhaltung, auch Kontinuitätsgleichung genannt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \underline{u}) = 0$$

Darin enthalten sind das Geschwindigkeitsfeld \underline{u} , die Druckverteilung p , sowie der Einfluss von Kraftfeldern (z. B. Schwerkraft) \underline{f} . Die Dichte des Mediums wird mit ρ bezeichnet. Des Weiteren ist die kinematische Viskosität ν bekannt.

Nimmt man für das Fluid eine konstante Dichte an, so vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (2)$$

Setzt man die Kontinuitätsgleichung (2) in den Impulssatz (1) ein, so erhält man die Impulsbilanz für inkompressible newtonsche Fluide:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

Man vereinfacht das Problem, indem man von einer stationären Strömung ($\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = 0$) ausgeht und die Einflüsse eines Kraftfeldes \underline{f} vernachlässigt. So gelangt man zu folgender Form:

$$(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \underline{u} \quad (3)$$

Dies ist die NAVIER-STOKES-Gleichung für stationäre, inkompressible Strömungen in Vektorschreibweise.

Sie lässt sich auch komponentenweise schreiben. Für das vorliegende Problem reicht die Darstellung im zweidimensionalen Raum. Dazu werden die Raumkoordinaten x und y verwendet und die Geschwindigkeitskomponenten in x -Richtung mit $u(x, y)$ und in y -Richtung mit $v(x, y)$ bezeichnet.

Um nun die Kontinuitätsgleichung und die NAVIER-STOKES-Gleichungen in entdimensionalisierter Form schreiben zu können, werden alle enthaltenen Längen auf eine charakteristische Länge l und alle Geschwindigkeiten auf die Anströmgeschwindigkeit u_∞ bezogen. Der Druck wird mit ρu_∞^2 dimensionslos gemacht.

Somit lassen sich folgende dimensionslose Größen schreiben:

$$\hat{v} = \frac{v}{u_\infty} \quad (4)$$

$$\hat{u} = \frac{u}{u_\infty} \quad (5)$$

$$\hat{x} = \frac{x}{l} \quad (6)$$

$$\hat{y} = \frac{y}{l} \quad (7)$$

$$\hat{p} = \frac{p}{\rho u_\infty^2} \quad (8)$$

Ersetzt man in Gleichung (3) die entsprechenden Größen, erhält man die NAVIER-STOKES-Gleichungen in folgender Form, hier komponentenweise notiert:

$$\begin{aligned} \frac{u_\infty^2}{l} \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{u_\infty^2}{l} \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} &= -\frac{u_\infty^2}{l} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\nu u_\infty}{l^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \right) \\ \frac{u_\infty^2}{l} \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \frac{u_\infty^2}{l} \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} &= -\frac{u_\infty^2}{l} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \frac{\nu u_\infty}{l^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} \right) \end{aligned}$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen mit $\frac{l}{u_\infty}$ kommt man auf die dimensionslose Form der vereinfachten NAVIER-STOKES-Gleichungen (3). Auf gleiche Weise wird auch die Kontinuitätsgleichung (2) entdimensionalisiert. Auf eine explizite Kennzeichnung der Normierung wird zu Gunsten der Übersichtlichkeit verzichtet:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\frac{\nu}{u_\infty l}}_{\frac{1}{\text{Re}}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\frac{\nu}{u_\infty l}}_{\frac{1}{\text{Re}}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

Man erinnere an dieser Stelle an die Definition der REYNOLDSZahl:

$$\text{Re} = \frac{u_\infty l}{\nu}. \quad (12)$$

3.2 Transformation

Die Annahme sehr geringer Viskosität erfordert eine sehr hohe REYNOLDSzahl.

Bei einem Grenzübergang $Re \rightarrow \infty$ reduzieren sich die Gleichungen (9) bis (11) wegen $\frac{1}{Re}$ auf den Fall der reibungsfreien Potentialströmung. Da in der wandnahen Schicht die Reibung stets zu berücksichtigen ist, dürfen die dazugehörigen Terme jedoch nicht verschwinden.

Es muss also eine geeignete Transformation vorgenommen werden, damit beim Grenzprozess $Re \rightarrow \infty$ nicht alle Reibungsterme in Gleichung (9) bis (10) verschwinden.

In der Grenzschicht ist die Ordinate y der Größenordnung $\mathcal{O}(\delta)$ und nimmt für $Re \rightarrow \infty$ extrem kleine Werte an. Damit Gleichung (2) jedoch nicht entartet, wird sie einer Transformation unterzogen. Aus den gleichen Gründen wird auch die v Komponente transformiert.

Man schreibt die sogenannten Grenzschicht-Transformationen¹ wie folgt:

$$\bar{y} = y \sqrt{Re} \sim \frac{y}{\delta} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{\bar{y}}{\sqrt{Re}} \quad (13)$$

$$\bar{v} = v \sqrt{Re} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{\bar{v}}{\sqrt{Re}} \quad (14)$$

Die neuen Variablen \bar{y} und \bar{v} sind nun von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$. Setzt man diese Variablen in Gleichung (9) bis (11) ein, erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{\sqrt{Re}} \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} \sqrt{Re} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2} Re \right) \\ u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{Re}} + \frac{\bar{v}}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\sqrt{Re}}{\sqrt{Re}} &= -\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \sqrt{Re} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \frac{1}{Re} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} Re \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\sqrt{Re}}{\sqrt{Re}} &= 0 \end{aligned}$$

Man kürzt entsprechend und kann nun den Grenzprozess $Re \rightarrow \infty$ durchführen. So erhält man die PRANDTLschen Grenzschichtgleichungen für eine stationäre, inkompressible Wandgrenzschicht:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2}}_{(II)} \quad (15)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (17)$$

¹vgl. H.Schlichting, Grenzschicht-Theorie, Springer 1997, 9.Auflage, S.158

3.3 Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen

Durch die geschickte Transformation ist genau ein Reibungsterm (II) in Gleichung (15) übrig geblieben. Ein Druckgradient in y -Richtung entfällt, was in Gleichung (16) deutlich wird. Der Druck innerhalb der Grenzschicht wird durch die Außenströmung aufgeprägt, wo er durch die reibungslose Strömung bestimmt wird und als bekannte Funktion $p(x)$ angesehen wird. Man erkennt die deutliche Vereinfachung dieser Gleichungen gegenüber den NAVIER-STOKESschen-Gleichungen. Mit Hilfe der beiden Randbedingungen kann der Druckgradient in Gleichung (15) ebenfalls eliminiert werden.

Die Randbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} \bar{y} = 0 : \quad u &= 0, & \bar{v} &= 0 \\ \bar{y} \rightarrow \infty : \quad u &= u_\infty \end{aligned}$$

Wertet man Gleichung (15) am Außenrand der Grenzschicht aus, folgt daraus:

$$u_\infty \frac{du_\infty}{dx} = -\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Da hier von einer konstanten ungestörten Anströmgeschwindigkeit ausgegangen wird, entfällt der Druckgradient. Für stationäre Strömungen lässt sich somit das System durch nur zwei Differentialgleichungen beschreiben:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (19)$$

Die Lösungen der PRANDTL'schen Grenzschichtgleichungen nach Gleichung (18) bis (19) sind unabhängig von der REYNOLDSzahl. Erst nach der Rücktransformation erhält man die abhängigen Geschwindigkeiten $u(x, y, \sqrt{\text{Re}})$ und $v(x, y, \sqrt{\text{Re}})$. Somit ist nur eine Rechnung für alle hohen REYNOLDSzahlen durchzuführen.

Von großem Vorteil ist, dass die numerische Lösung aufgrund des parabolischen Typs des Systems in Strömungsrichtung fortschreitend erfolgt.

Die folgende Abbildung zeigt die zu erwartende Ausprägung der Grenzschicht an einer ebenen Platte.

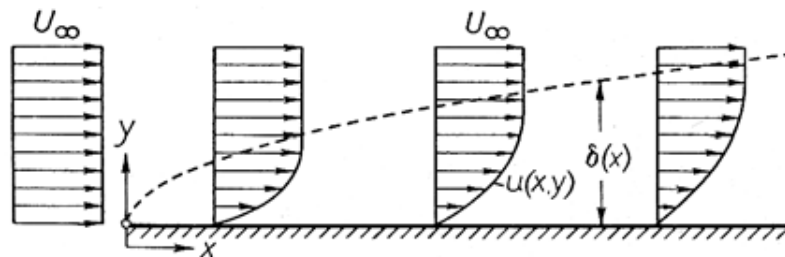


Abbildung 1: laminare Grenzschicht

4 Numerische Methoden

4.1 Finite Differenzen Methode

Die Finite Differenzen Methode (FDM) überführt eine Differentialgleichung in ein System von Gleichungen, indem die Differentialausdrücke durch geeignete Differenzenquotienten approximiert werden.

Die Vorgehensweise wird an folgender Beispielaufgabe demonstriert:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\Delta u(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ u(x, y)|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Auf dem Gebiet $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ist die exakte analytische Lösung bekannt:

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (21)$$

Das Gebiet wird, wie in Abbildung 2 gezeigt, durch ein Koordinatengitter aufgeteilt. Die Gitterlinien stehen in diesem Fall senkrecht aufeinander und haben einen konstanten Abstand $h = \Delta x = \Delta y$ zueinander. Es ist allerdings auch möglich in beide Koordinatenrichtungen unterschiedliche Abstände oder variable Abstände zu verwenden. Die Schnittpunkte können nun über die Koordinaten i und j referenziert werden. Somit ist es möglich, für die Funktionen $f(x, y)$ und $u(x, y)$ mit den Indizes i und j folgende Abkürzungen zu definieren:

$$\begin{aligned} f_{i,j} &:= f(x_i, y_j) \\ u_{i,j} &:= u(x_i, y_j) \end{aligned}$$

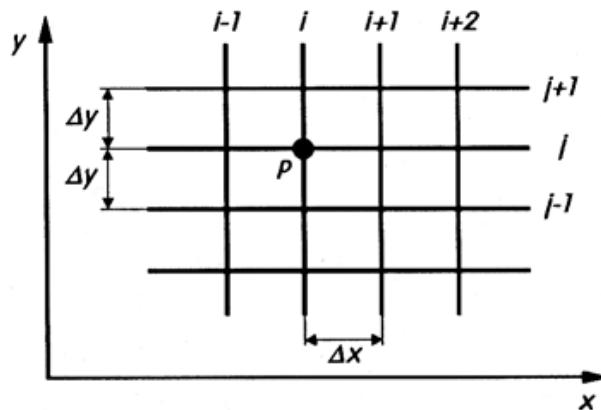


Abbildung 2: Gitteranordnung zur Entwicklung von Differenzengleichungen

4.2 Konsistenz und Stabilität

Wenn die Differentiale durch Differenzenausdrücke ersetzt werden, dann entsteht dabei immer ein Diskretisierungsfehler, seine Größe ist abhängig vom Abstand der Gitterpunkte zueinander.

Der Fehler entspricht der Differenz zwischen der Approximation und dem tatsächlichen Differential $\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta_x^+ \delta_x^-(u_{i,j}) \right|$.

Zur Abschätzung des Fehlers wird eine Taylorentwicklung der Approximation durchgeführt.

$$\begin{aligned}
 |u''(x) - \delta_x^+ \delta_x^-(u(x, y))| &= u''(x) - \frac{u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)}{h^2} \\
 \stackrel{\text{Taylor}}{=} & u''(x) - \frac{u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x) + \text{h.o.t}}{h^2} \\
 & \quad - \frac{u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x) + \text{h.o.t}}{h^2} \\
 & \quad + \frac{2u(x)}{h^2} \\
 &= u''(x) - \frac{h^2 u''(x) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(x) + \text{h.o.t}}{h^2} \\
 &= -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(x) + \text{h.o.t} \implies \mathcal{O}(h^2)
 \end{aligned}$$

In diesem Fall wurde die Taylorentwicklung nach dem vierten Glied abgebrochen und die weiteren Terme als Higher Order Terms (h.o.t) bezeichnet. Für $h \rightarrow 0$ entwickelt sich dieser Fehler gegen Null und der dominierende Faktor ist dabei h^2 . Zu beachten ist, dass die vierte Ableitung benötigt wird, das heißt $u(x)$ muss in x ausreichend oft differenzierbar sein.

Analog dazu ergibt sich der Fehler für die zweite Approximation $\delta_y^+ \delta_y^-(u_{i,j})$. Auch in diesem Fall ergibt sich ein Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$. Das Verfahren ist somit konsistent mit der Konsistenzordnung 2.

Damit das Verfahren konvergent ist, benötigt man neben der Konsistenz auch Stabilität. Die Stabilität ist abhängig vom verwendeten Lösungsalgorithmus und der Implementierung. In diesem Fall wurde die CHOLESKY-Zerlegung verwendet.

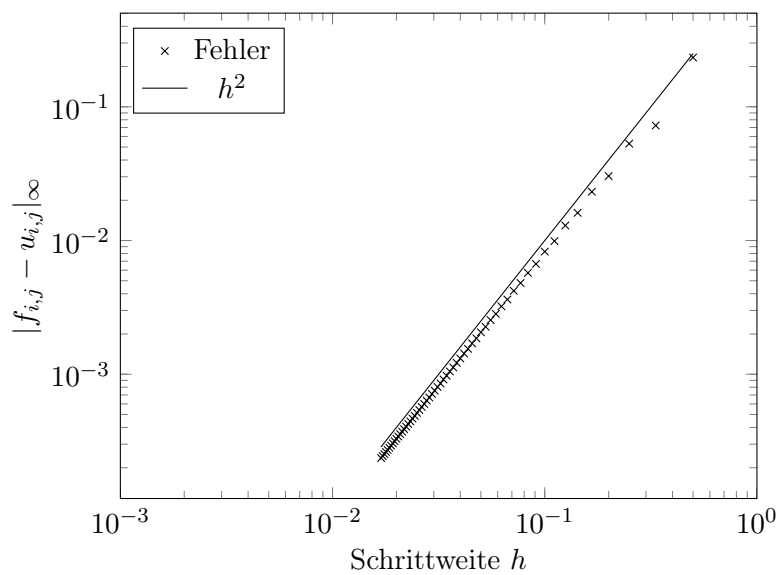


Abbildung 3: Fehlerentwicklung in logarithmischer Darstellung

In Abbildung 3 ist die Differenz zwischen der numerischen und der bekannten exakten Lösung – also der Fehler der Approximation – über der jeweiligen Schrittweite h dargestellt. Anhand des Graphen lässt sich darauf schließen, dass die gewählte Diskretisierung (22) zusammen mit der CHOLESKY-Zerlegung stabil ist. Zum Vergleich wurde die Parabel h^2 mit dargestellt, um die Konsistenzordnung 2 zu veranschaulichen.

5 Algorithmus zur Grenzschichtberechnung

Für die numerische Simulation der Grenzschicht müssen die PRANDTLschen Grenzschichtgleichungen (18) und (19) mit Hilfe der FDM in ein System von linearen Gleichungen überführt werden. Diese Gleichungen haben parabolischen Charakter, was mathematisch bedeutet, dass sich die Strömung streifenweise in Strömungsrichtung entwickelt.

Die streifenweise Betrachtung der Grenzschicht erfolgt, indem man ein Koordinatengitter mit festen Gitterpunkten (i, j) einführt. Die tangentielle Strömungsrichtung x entspricht dabei den i -Gitterkoordinaten, die Normalenrichtung y entspricht den j -Gitterkoordinaten. Ausgehend von einem Anfangsstreifen $i = 1$, auf dem die Geschwindigkeitsprofile $u_{1,j} = 1$ und $v_{1,j} = 0$ vollständig bekannt sind, wird die Grenzschicht schrittweise in x -Richtung aufgebaut. Der äußerste Punkt eines Streifens wird mit J bezeichnet.

Mit Hilfe der Grenzschichtgleichung (18) kann das Geschwindigkeitsprofil auf dem jeweils nächsten Streifen iterativ berechnet werden, indem die Differentiale durch geeignete Differenzenquotienten ersetzt werden (vgl. Schlichting Kap. 23.1):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + \mathcal{O}([\Delta y]^2) \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + \mathcal{O}([\Delta y]^2) \end{aligned}$$

Zur Erhöhung der Genauigkeit werden die Approximationen in y -Richtung nicht auf den Gitterpunkten ausgewertet, sondern für einen gedachten Zwischenstreifen $i + \frac{1}{2}$ aufgeschrieben, und deshalb nochmals gemittelt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} \right] + \mathcal{O}([\Delta x]^2) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} \right] + \mathcal{O}([\Delta x]^2) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Approximationen in die Gleichung (18) ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$A_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j+1} + B_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j} + C_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j-1} + D_{i+\frac{1}{2},j} + \mathcal{O}([\Delta x], [\Delta y]^2) = 0 \quad (23)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 A_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\frac{1}{\Delta y} - \frac{v_{i,j}}{2}}{2\Delta y} \\
 B_{i+\frac{1}{2},j} &= - \left[\frac{1}{[\Delta y]^2} + \frac{u_{i,j}}{\Delta x} \right] \\
 \bar{B}_{i+\frac{1}{2},j} &= - \left[\frac{1}{[\Delta y]^2} - \frac{u_{i,j}}{\Delta x} \right] \\
 C_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\frac{1}{\Delta y} + \frac{v_{i,j}}{2}}{2\Delta y} \\
 D_{i+\frac{1}{2},j} &= A_{i+\frac{1}{2},j} u_{i,j+1} + \bar{B}_{i+\frac{1}{2},j} u_{i,j} + C_{i+\frac{1}{2},j} u_{i,j-1}
 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat die Dimension $n = J - 2$ und besitzt die folgende Form. Dabei wurde zur besseren Übersicht nur der Index j dargestellt:

$$\mathbf{A}\vec{u} = \vec{f}$$

$$\begin{pmatrix}
 B_0 & A_0 & & & & & 0 \\
 C_1 & B_1 & A_1 & & & & \\
 & C_2 & B_2 & A_2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & C_{n-1} & B_{n-1} & A_{n-1} & \\
 0 & & & & C_n & B_n &
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 \vdots \\
 u_{n-2} \\
 u_{n-1}
 \end{pmatrix}
 = -
 \begin{pmatrix}
 D_0 + C_0 u_0 \\
 D_1 \\
 D_2 \\
 \vdots \\
 D_{n-1} \\
 D_n + A_n u_n
 \end{pmatrix}$$

Wobei die Randbedingungen gelten:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 0 \\
 u_n &= u_\infty
 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist eine erste Näherung für den nächsten Streifen u_{i+1} der Grenzschicht.

Sobald das tangentielle Geschwindigkeitsprofil u im Streifen $i+1$ vollständig bestimmt ist, kann man die zugehörigen Normalengeschwindigkeiten aus der Kontinuitätsgleichung (2) ermitteln. Dazu formuliert man die Kontinuitätsgleichung mit geeigneten Approximationen für den Punkt $P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ aus:

$$v_{i+\frac{1}{2},j} = v_{i+\frac{1}{2},j-1} + (u_{i,j} - u_{i+1,j} + u_{i,j-1} - u_{i+1,j-1}) \frac{\Delta x}{2\Delta y} \quad (24)$$

In Gleichung (23) entsteht ein Fehler der Größenordnung $\mathcal{O}(\Delta x)$, weil diese zwar für den Punkt $P_{i+\frac{1}{2}}$ formuliert wurde, aber stattdessen nur $u_{i,j}$ und $v_{i,j}$ auftreten. Dieser Fehler kann auf $\mathcal{O}([\Delta x]^2)$ reduziert werden, indem in die Koeffizienten $A_{i+\frac{1}{2},j}$, $B_{i+\frac{1}{2},j}$, $C_{i+\frac{1}{2},j}$ und $\bar{B}_{i+\frac{1}{2},j}$ das Ergebnis von (24) sowie der folgende Mittelwert eingesetzt und das Geschwindigkeitsprofil für den Streifen u_{i+1} neu berechnet wird:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \quad (25)$$

Nach der Berechnung eines Streifens, wird geprüft, ob die Grenzschicht gewachsen ist, indem die Bedingung $|u_\infty - u_{i+1,J-1}| < 10^{-4}$ ausgewertet wird. Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, wird der zuvor berechnete Grenzschichtstreifen um einen Punkt $u_{i,J+1} = u_\infty$ ergänzt und die Berechnung wiederholt.

Der Anfangsstreifen stellt darüber hinaus eine Besonderheit dar. Dort wird eine erste Näherung für u_{i+1} berechnet und das dazugehörige v bestimmt. Mit diesem v wird die Berechnung für den Anfangsstreifen so lange wiederholt, bis die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Ergebnissen von v innerhalb einer Fehlerschranke $[\Delta x]^2$ liegt.

6 Ergebnisse

In Abschnitt 3 wurden die zur Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes der laminaren Grenzschicht notwendigen Gleichungen entdimensionalisiert und entsprechend modelliert um mit den so erhaltenen Gleichungen nach dem FDM-Verfahren den Programmcode zu implementieren. Um nun die von dem Programm errechneten Werte in dimensionsbehaftete Größen zurückzurechnen müssen entsprechende Rücktransformationen vorgenommen werden.

Mit Hilfe der Gleichungen (4) bis (7) und (13) bis (14) kommt man auf die folgenden Gleichungen zur Rückmodellierung und Dimensionalisierung der berechneten Größen:

$$v_{\text{real}} = \frac{u_{\infty}}{\sqrt{\text{Re}}} \bar{v} \quad (26)$$

$$u_{\text{real}} = u_{\infty} \hat{u} \quad (27)$$

$$y_{\text{real}} = \frac{l}{\sqrt{\text{Re}}} \hat{y} \quad (28)$$

$$x_{\text{real}} = l \hat{x} \quad (29)$$

Hierbei bezeichnet der Index real die tatsächlichen Strömungsgrößen.

Um eine Aussage über die gemachten Rechnungen treffen zu können, modellieren wir an dieser Stelle drei in der Realität vorkommende Fälle von strömungstechnischen Problemen. Die charakteristischen Flächen werden hier idealisiert als ebene Platten angenommen, um andere strömungsmechanische Effekte aus zu schließen.

Die drei Fälle sind in Tabelle 1 mit ihren zugehörigen Parametern aufgeführt:

Fall	u_{∞} [m/s]	l [m]	ν [m ² /s]	Re [1]
1	1	10	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$6,7 \cdot 10^5$
2	5	10	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$33,3 \cdot 10^5$
3	22	10	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$148 \cdot 10^5$

Tabelle 1: Strömungsparameter

Bei allen drei Fällen handelt es sich um die Umströmung eines 10 m langen LKW, der mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten fährt. Die Grenzschicht entwickelt sich dabei beispielsweise an der Plane, mit der die Ladefläche abgedeckt ist. Der LKW fährt in diesen Beispielen mit 3,6 km/h, 18 km/h sowie 80 km/h. Angesichts der hohen REYNOLDSzahl müsste sich im dritten Fall eigentlich eine turbulente Grenzschicht ausbilden, als Beispiel für sehr hohe REYNOLDSzahlen sei dieser Fall aber trotzdem angenommen.

Mit diesen Parametern lassen sich die folgenden drei Grenzschichtprofile grafisch darstellen:

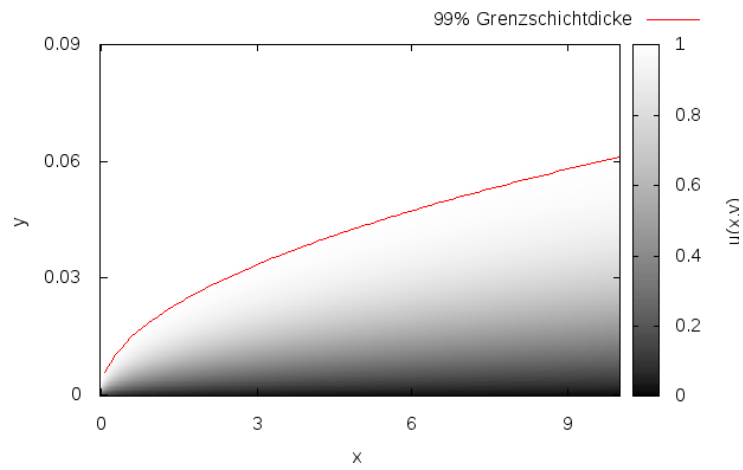


Abbildung 4: Grenzschichtprofil Fall 1

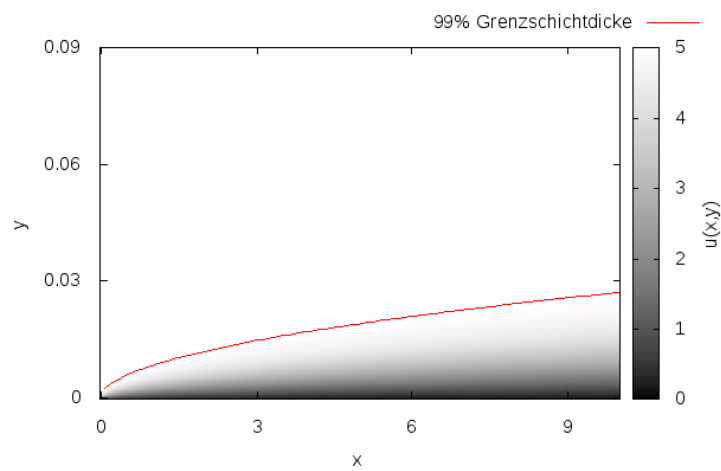


Abbildung 5: Grenzschichtprofil Fall 2

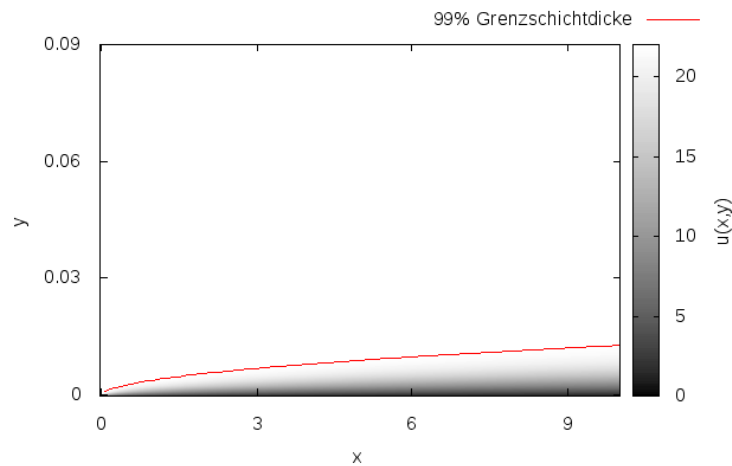


Abbildung 6: Grenzschichtprofil Fall 3

Als Vergleich ist eine Abschätzung² für die Dicke der Grenzschicht nach folgender Gleichung mit in den Abbildungen eingezeichnet:

$$\delta(x) = \frac{5.0x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (30)$$

Es ist zu erkennen, dass die Grenzschichtabschätzung gut mit den berechneten Werten übereinstimmt. Weiterhin ist zu sehen, dass mit steigender REYNOLDSzahl die Grenzschicht wie erwartet kleiner wird. Besonders gut ist dies in Abbildung 4 zu sehen, auch wenn hier aufgrund der sehr hohen Reynoldszahl eher der Fall einer turbulenten als der einer laminaren Grenzschicht vorliegt.

Für alle drei Fälle lässt sich sagen, dass wie in der Herleitung der PRANDTLschen Grenzschichtgleichung, die Grenzschichtdicke sehr viel kleiner als die dazugehörige Länge ist. Die Geschwindigkeit an der Wand ist stets Null, somit ist die Wandhaftbedingung erfüllt. Auch der kontinuierliche Übergang der Strömungsgeschwindigkeit in die Anströmgeschwindigkeit ist so zu erwarten.

²vgl. H.E. Siekmann, P.U. Thamsen, Springer 2008, 2. Auflage, S. 196

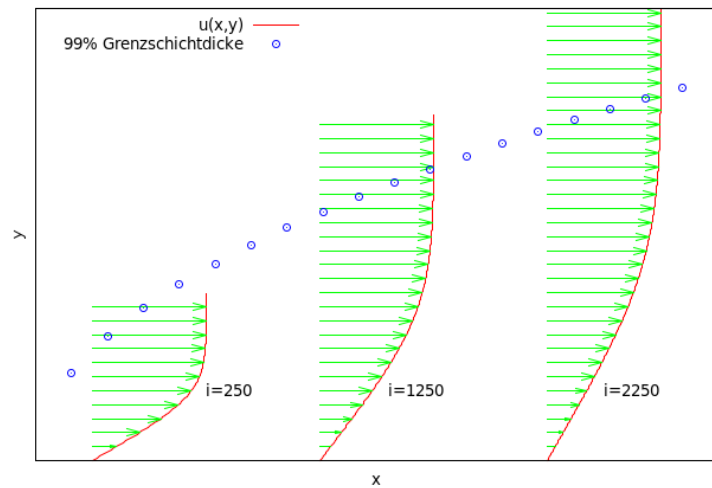


Abbildung 7: Grenzschichtprofile

In Abbildung 7 sind für die angegebenen Iterationsschritte i die jeweiligen Grenzschichtprofile eingezeichnet. Dabei ist eine gute Annäherung an Abbildung 1 zu erkennen. Zusätzlich wurde die Grenzschichtabschätzung nach Gleichung (30) mit in die Zeichnung aufgenommen. Zu Beginn der Rechnung liegt die Abschätzung leicht über der Berechnung, was sich nach weiteren Iterationsschritten umkehrt. Mögliche Ursachen hierfür können sowohl eine zu geringe Schrittweite an der Platte, als auch eine zu ungenaue Abschätzung der Grenzschicht nach Gleichung (30) sein.

7 Fazit

Das Projekt Praktische Mathematik hat uns Einblicke in die Verfahren der numerischen Mathematik gewährt. In diesem speziellen Fall wurde das Verfahren der Finiten Differenzen Methode am Beispiel der laminaren Grenzschicht näher behandelt und könnte mit den so erworbenen Kenntnissen leicht in andere Problemstellungen übertragen werden.

Mit den heutigen Rechnerkapazitäten lassen sich die großen linearen Gleichungssysteme, die sich bei der FDM ergeben, schnell und effizient lösen.

Bei allen Rechnungen darf die Fehleranalyse nicht vernachlässigt werden, um eine Aussage über die Genauigkeit der Ergebnisse treffen zu können. Es ist deshalb sicher zu stellen, dass die verwendeten Lösungsverfahren stabil und konvergent sind.

Zur Lehrveranstaltung wollen wir anmerken, dass die gewählte Problemstellung uns, wie auch die Tutoren, vor neue Herausforderungen gestellt hat. Die zur Lehrveranstaltung vorgeschlagenen Projekte sollten aufgrund der vorliegenden Erfahrungen einen strukturierteren Ablauf, als bei unserem selbst definiertem Projekt, gewährleisten. Wir würden deshalb zukünftigen Studenten anraten, sich an bereits behandelte Projekte mit einem gewissen Erfahrungsschatz zu halten, als auch mit Verlusten innerhalb der Gruppe zu rechnen und sich auch über dieses Problem zu Beginn der Veranstaltung Gedanken zu machen.

Zu guter Letzt wollen wir festhalten, dass wir in Jan Heiland einen engagierten und kompetenten Tutor gefunden haben. Bei Ihm – wie auch bei David Nolte, dessen Hilfe wir nur selten in Anspruch zu nehmen brauchten – möchten wir uns an dieser Stelle herzlich bedanken.